Fiche 5 : Integrales et primitives

Plan de la fiche

I - Les primitives
II - Les intégrales
III - Intégrale et inégalités
IV - La formule d'intégration par parties

I - Les primitives

Primitive d'une fonction sur un intervalle
On considère deux fonctions F et f définies sur un même intervalle I.
Dire que F est une primitive de f sur I signifie que F est dérivable sur I et que pour tout x de I, $F'(x) = f(x)$.

Exemple :

$F : x \mapsto x^4$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto 4x^3$
Car $F'(x) = 4x^3 = f(x)$

⚠ La fonction $G : x \mapsto x^4 + 7$ est aussi une primitive de f sur $\mathbb{R}$ car elle vérifie $G'(x) = 4x^3 = f(x)$ pour tout x réel.
A noter : on parlera d'une primitive car visiblement, il n'y a pas unicité.
Ecrire « la fonction $x \mapsto \frac{-1}{x}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{-1}{x^2}$ sur l'intervalle $]-\infty,0[$ et sur l'intervalle $]0,+\infty[$ » est correct.
Ecrire « la fonction $x \mapsto \frac{-1}{x}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{-1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$ » est incorrect.

Existence (condition suffisante)
Si f est continue sur I alors f admet des primitives sur I.

Les primitives d'une fonction sur un intervalle
Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I. Alors une fonction G est une primitive de f sur I si et seulement s'il existe un réel k tel que $G(x) = F(x) + k$ pour tout x de I.

Exemple :

Toute primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto 4x^3$ est de la forme $x \mapsto x^4 + k$ avec k réel.

Primitive vérifiant une condition
Soit x_0 un réel donné d'un intervalle I et y_0 un réel donné. Alors il existe une unique primitive de f sur I qui prend la valeur y_0 en x_0.

▶ À SAVOIR

Primitives usuelles
Elles sont obtenues par lecture « à l'envers » du tableau des dérivées des fonctions usuelles.
La lettre n désigne un entier naturel.

Fonction	Primitive	Intervalle de validité I
$x \mapsto a$	$x \mapsto ax$	$I \subset \mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$I \subset \mathbb{R}$ avec $n \neq -1$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}$ avec $n \geq 2$	$x \mapsto \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$	$I \subset \mathbb{R}^*$
$x \mapsto \frac{1}{x^2}$	$x \mapsto \frac{-1}{x}$	$I \subset \mathbb{R}^*$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x}$	$I \subset \mathbb{R}^{*+}$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	$I \subset \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln\lvert x\rvert$	$I \subset \mathbb{R}^*$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x)$	$I \subset \mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x)$	$I \subset \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$x \mapsto \tan(x)$	$I \subset \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\right\}$

Théorèmes
• Linéarité : si les fonctions U et V sont respectivement des primitives des fonctions u et v sur l'intervalle I alors pour tous réels α et β, $\alpha U + \beta V$ est une primitive de $\alpha u + \beta v$ sur I.
• On considère une fonction u dérivable sur un intervalle I.
e^u est une primitive de $u'e^u$ sur I.
Si u est strictement positive sur I alors pour tout réel α différent de -1, $\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ est une primitive de $u'u^\alpha$ sur I.
Si u ne s'annule pas sur I et garde un signe constant alors $\ln\lvert u\rvert$ est une primitive de $\frac{u'}{u}$ sur I.

Exemple :

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto x + \cos(x)$
Il s'agit de la somme de deux fonctions donc on fait la somme des primitives, en utilisant le tableau des primitives usuelles.
$F : x \mapsto \frac{x^2}{2} + \sin(x)$
On a obtenu une primitive.
Toutes les primitives de f sont les fonctions du type $x \mapsto \frac{x^2}{2} + \sin(x) + K$

II - Les intégrales

Intégrale définie
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.
On considère deux réels a et b appartenant à I, alors le réel $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive F choisie.

Ce réel $F(b) - F(a)$ s'appelle l'intégrale de f entre a et b. On dit aussi « intégrale de a à b de f ».

Notations et vocabulaire :

L'intégrale de a à b de f est notée $\int_a^b f(x)\,dx$

Les réels a et b sont les bornes de l'intégrale : le réel a est la borne inférieure, le réel b est la borne inférieure.

On a : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$ ...

La lettre x dans dx, (ainsi que la lettre t dans dt…) est dite muette ; elle indique la variable par rapport à laquelle on doit chercher une primitive de f. Elle doit être différente de celles attribuées à la fonction, aux bornes…

Exemples :

a) $\int_0^1 x^2\,t\,dx = \frac{t}{3}$ car $x \mapsto \frac{x^3}{3}t$ est une primitive de $x \mapsto x^2\,t$ sur $\mathbb{R}$.

b) $\int_0^1 x^2\,t\,dx = \frac{x^2}{3}$ car $x \mapsto x^2\frac{t^2}{2}$ est une primitive de $t \mapsto x^2\,t$ sur $\mathbb{R}$.

On utilise également la notation suivante : $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$, qui permet d'expliciter une primitive de f.

Exemple :

$$\int_0^1 (x+1)dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 = \left(\frac{1^2}{2} + 1\right) - \left(\frac{0^2}{2} + 0\right) = \frac{3}{2}$$

☞ Méthode : « Utilisation du tableau des primitives », fiche exercices n°5 « Integrales et primitives ».

Primitive définie par une intégrale

Soit f une fonction continue sur l'intervalle I et a un élément de I.

La fonction F définie sur I par : $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.

Exemple :

La fonction $\ln$ est la primitive nulle en 1 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ car $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$ pour tout réel x strictement positif.

Evidemment on a : $\left(x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt\right)' = f$

Aire et intégrale

On considère une fonction f continue et positive sur un intervalle I ainsi que deux réels a et b appartenant à I et tels que $a < b$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

L'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses, les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b f(x)\,dx$ l'unité d'aire étant l'aire du rectangle construit sur $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Remarque : le domaine considéré est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $\begin{cases} a \le x \le b \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$

Pour une fonction continue et négative sur I, l'aire du domaine défini par $\begin{cases} a \le x \le b \\ f(x) \le y \le 0 \end{cases}$ est égale à $-\int_a^b f(x)\,dx$

☞ Méthode : « Calculer une aire », fiche exercices n°5 « Integrales et primitives ».

► À SAVOIR

Propriétés de l'intégrale
Dans toute cette partie, f et g sont des fonctions continues sur I.
Les réels a, b, c sont des éléments de I.
Relation de Chasles
$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

Conséquences :
$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$
$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Linéarité de l'intégrale
$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$ pour tous réels α et β.

☞ Méthode : « Calculer une intégrale, combinaison linéaire de deux intégrales », fiche exercices n°5 « Integrales et primitives ».

Valeur moyenne
La valeur moyenne de f sur $[a, b]$ avec $a < b$ est le réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$
Cette notion généralise celle de moyenne arithmétique.

III - Intégrale et inégalités

Dans toute cette partie, f et g sont des fonctions continues sur I.
Les réels a et b sont des éléments de I, avec $a \leq b$.

Positivité
Si f est positive sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

Positivité et croissance
Si $f \leq g$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$
On peut retenir sous cette forme : si des fonctions sont rangées dans un certain ordre ($f \leq g$) et si les bornes sont bien ordonnées (ici $a \leq b$) alors les intégrales sont rangées dans le même ordre.

☞ Méthode : « Sens de variation d'une suite définie par une intégrale », fiche exercices n°5 « Integrales et primitives ».

Intégrale et valeur absolue
$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$
On peut retenir sous cette forme : si les bornes sont bien ordonnées $(a \leq b)$ alors la valeur absolue de l'intégrale est inférieure à l'intégrale de la valeur absolue.

Inégalité de la moyenne
Si pour tout x de $[a, b]$, $m \leq f(x) \leq M$, alors $m(b-a) \leq \int_b^a f(x)\,dx \leq M\,(b-a)$.
Autre forme de cette inégalité :
Si pour tout x de $[a, b]$, on a $|f(x)| \leq K$ alors $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq K\,(b-a)$

Intégrale et parité
Si f est paire, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$
Si f est impaire $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

IV - La formule d'intégration par parties

Les fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle I et leurs dérivées u' et v' sont continues sur I, a et b sont des éléments de I.
Alors :
$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt = \left[u(t)\,v(t)\right]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt$$
Cette formule s'applique pour calculer les intégrales de fonctions des types suivants :
- $x \mapsto x^{\alpha} \ln(x)$
- $x \mapsto x^{\alpha} e^{x}$
- $x \mapsto x^{\alpha} \cos(x)$
- $x \mapsto x^{\alpha} \sin(x)$

☞ Méthode : « La formule d'intégration par parties », fiche exercices n°5 « Integrales et primitives ».